Die Periodicitätsmoduln

der

Abel'schen Integrale erster Gattung als Functionen eines Parameters aufgefasst für den Fall einer Riemann'schen Fläche, deren Gleichung in Bezug auf die eine Variabele binomisch ist.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 21. Juni 1893

VON

Hermann Broecker

aus Osnabrück.

OPPONENTEN:

Hr. Cand. math. Walther Koch.
- Cand. math. Hans Wolff.
- Dr. phil. B. Weinstein, Reg.-Rath, Mitgl. d. Kais. Norm.-Aich.-Comm., Privatdocent a. d. Universität.

BERLIN.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke).

Linienstr. 158.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535713_0210

Einen speciellen Fall der vorgelegten Aufgabe hat Herr Fuchs[1]) behandelt in seiner berühmten Arbeit: „Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst".

Die in dieser Arbeit von Herrn Fuchs angewandten Methoden lassen sich vollständig auch auf den Fall einer allgemeinen binomischen Gleichung anwenden. Dies zu zeigen ist der Zweck vorliegender Abhandlung.

Die hauptsächlichsten Resultate, wie sie von Herrn Fuchs gefunden wurden, sollen hier kurz angeführt werden, da sie den für den allgemeinen Fall zu gewinnenden Ergebnissen in jeder Hinsicht entsprechen:

I. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale sind gleich den doppelten Werthen von bestimmten Integralen, deren Grenzen die Verzweigungswerthe bilden.

II. Betrachtet man diese bestimmten Integrale als Functionen eines ihrer Verzweigungswerthe $-x-$ und lässt man die Variabele x einen vollständigen Umlauf um irgend einen der andern Verzweigungspunkte beschreiben, so verwandeln sich diese Functionen in homogene lineare Relationen der ursprünglichen bestimmten Integrale mit ganzzahligen Coefficienten.

Diese Relationen werden für jeden Verzweigungspunkt, einschliesslich des unendlich fernen Punktes, in sehr einfacher Weise aus den Veränderungen der Verzweigungsschnitte[2]) abgeleitet und vollständig zusammengestellt.

III. Die bestimmten Integrale und also auch die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale vom Geschlecht p genügen linearen Differentialgleichungen von der Ordnung $2p$. Die Coefficienten dieser Gleichungen sind ganze rationale Functionen von x und den übrigen Verzweigungswerthen.

[1]) Crelle, Journ. f. Math. Bd. 71, S. 91—136.

[2]) S. 100—101.

Dieser Satz ist in einer späteren Arbeit des Herrn Fuchs[3]): „Ueber die linearen Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale genügen etc.“ verallgemeinert und in folgender Form bewiesen worden:

Die Periodicitätsmoduln eines Abel'schen Integrals 1. Gattung vom Geschlecht p genügen einer linearen Differentialgleichung von der Ordnung $2p$, wenn als unabhängige Variabele einer der Verzweigungswerthe des Integrals angenommen worden ist. Die Coefficienten dieser Differentialgleichung sind rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x, sowie der übrigen Parameter, welche das betreffende Integral enthält.

Für den Fall der hyperelliptischen Integrale werden diese Differentialgleichungen in der zuerst erwähnten Abhandlung[4]) vollständig abgeleitet und für die Coefficienten wird das Gesetz aufgestellt.

Die Differentialgleichungen, denen die Periodicitätsmoduln der Abel'schen Integrale genügen, gehören zu jener besondern, von Herrn Fuchs[5]) in seinen berühmten Arbeiten zur Theorie der linearen Differentialgleichungen hervorgehobenen Klasse von Gleichungen, deren sämmtliche Integrale weder im Endlichen noch im Unendlichen eine „wesentliche singuläre Stelle“ besitzen.

---

[3]) Crelle, Bd. 73.
[4]) Crelle, Bd. 71, S. 101—121.
[5]) Crelle, Bd. 66 u. 68.

I.

In der folgenden Arbeit werden wir uns zu beschäftigen haben mit einer Riemann'schen Fläche, deren Gleichung die Form hat:

$$F(s, z) = f_0(z) + s^n \cdot f_1(z) = 0 \tag{1}$$

wobei $f_0(z)$ und $f_1(z)$ ganze rationale Functionen von z bedeuten.

Die Verzweigungswerthe der Fläche sind Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = n \cdot s^{n-1} \cdot f_1(z) = 0$$

Eine Verzweigung findet demnach nur in denjenigen Punkten, in denen entweder $f_0(z)$ oder $f_1(z)$ verschwindet, resp. in dem Punkte $z = \infty$ statt.

Jedes der betreffenden Riemann'schen Fläche zugehörige Integral 1. Gattung ist unter der Form enthalten:

$$y = \int dz \sum_{h=1}^{h=n-1} \frac{\varphi_h(z)}{s^h} \tag{2}$$

wo die $\varphi_h(z)$ rationale Functionen von z sind.

Setze ich:

$$s = \psi(z) \cdot \prod_{\nu=0}^{\nu=m} (z - k_\nu)^{\frac{r_\nu}{n}}$$

wo $\psi(z)$ eine rationale Function von z ist und mit $k_\nu (\nu = 0, 1 \ldots m)$ die $m+1$ Verzweigungspunkte unserer algebraischen Gleichung: $F(s, z) = 0$ bezeichnet sind, so kann ich die Grössen $\frac{r_\nu}{n}$ sämmtlich als positive echte Brüche annehmen und der Gleichung (2) die folgende Gestalt geben:

$$(2a) \qquad y = \int dz \sum_{h=1}^{h=n-1} \frac{\varphi_h(z)}{\Pi (z-k_\nu)^{h \cdot \frac{r_\nu}{n} - \left[h \cdot \frac{r_\nu}{n}\right]}} \qquad \nu = 0, 1, \ldots m$$

Jetzt sind die $\varphi_h(z)$ ganze rationale Functionen von z. Dabei bezeichne ich nach Gauss durch $[\mathfrak{a}]$ die grösste in $\mathfrak{a}$ enthaltene ganze Zahl.

Da die Grössen:

$$h \cdot \frac{r_\nu}{n} - \left[h \cdot \frac{r_\nu}{n}\right]$$

stets < 1 sind, so kann das Integral in keinem der Verzweigungspunkte k_ν einen unendlich grossen Werth erhalten.

Damit y auch im Punkte $z = \infty$ endlich bleibe, muss sein:

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \left(h \cdot \frac{r_\nu}{n} - \left[h \cdot \frac{r_\nu}{n}\right] \right) - g_h > 1 \text{ oder } > 2$$

je nachdem $\Sigma h \cdot \frac{r_\nu}{n}$ gebrochen bleibt oder eine ganze Zahl wird. g_h ist der Grad von $\varphi_h(z)$.

Die grössten Werthe, welche die ganzen Zahlen g_h überhaupt annehmen können, sind:

$$(4) \qquad \begin{aligned} g_h &= \left[\sum_{\nu=0}^{m} h \cdot \frac{r_\nu}{n} \right] - \sum_{\nu=0}^{m} \left[h \cdot \frac{r_\nu}{n} \right] - 1 \text{ oder:} \\ g_h &= \left[\Sigma h \cdot \frac{r_\nu}{n} \right] - \Sigma \left[h \cdot \frac{r_\nu}{n} \right] - 2 \end{aligned}$$

je nachdem $h \cdot \frac{r_\nu}{n}$ eine gebrochene oder eine ganze Zahl ist.

Ein Fundamentalsystem von linear unabhängigen Integralen 1. Gattung kann ich bilden aus den Integralen von der Form:

$$(5) \qquad y_{e,h} = \int \frac{z^e}{\Pi (z-k_\nu)^{h \cdot \frac{r_\nu}{n} - \left[h \cdot \frac{r_\nu}{n}\right]}}$$

$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots n-1 \\ e = 0, 1, \ldots g_h \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der möglichen Integrale dieser Form ist:

$$\sum_{h=1}^{n-1} (g_h + 1)$$

Da die $y_{c,h}$ ein Fundamentalsystem bilden, wie leicht zu erweisen ist, so muss diese Anzahl $= p$, d. i. gleich dem Geschlecht der Riemann'schen Fläche, resp. der zugehörigen algebraischen Gleichung sein.

Also muss sein:

$$p = \sum_{h=1}^{n-1} (g_h + 1) \tag{6}$$

Die Zahl p bestimmen wir nach Riemann[6]) auch aus der folgenden Formel:

$$w = 2(n-1) + 2p$$

Hierbei bezeichnet w die Summe der Ordnungszahlen der Verzweigung an den einzelnen Stellen: k_0, $k_1 \ldots k_m$, ∞.

Ich setze:

$$\frac{r_\nu}{n} = \frac{\varrho_\nu}{n_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots m) \tag{7}$$

wobei die rechte Seite den Bruch in der reducirten Form darstellt, so dass n_ν ein Theiler von n ist und ϱ_ν mit n_ν keinen gemeinsamen Theiler besitzt. Ferner setze ich:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{r_\nu}{n} - \left[\sum \frac{r_\nu}{n}\right] = \frac{\varrho_{m+1}}{n_{m+1}}$$

wo die rechte Seite ebenfalls einen reducirten echten Bruch darstellt.

Dann sind die Ordnungszahlen der Verzweigung in den Punkten k_ν:

$$n\left(1 - \frac{1}{n_\nu}\right) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots m)$$

während die betreffende Ordnungszahl für den Punkt $z = \infty$ ist:

---

[6]) Crelle, Bd. 54.

$$n\left(1-\frac{1}{n_{m+1}}\right)$$

Also wird sein:

$$w = n\sum_{\nu=0}^{m+1}\left(1-\frac{1}{n_\nu}\right)$$

Aus der Riemann'schen Formel folgt alsdann:

$$p = \frac{1}{2}\,\mathrm{n}\,.\sum_{\nu=0}^{\nu=m+1}\left(1-\frac{1}{n_\nu}\right)-(n-1)$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck für das Geschlecht einer binomischen Gleichung.

Am einfachsten wird diese Formel für den speciellen Fall:

$$n_\nu = n \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots .\ m+1)$$

Alsdann ist:

$$p = \frac{1}{2}\,n\,(m-1)$$

Da wir gesehen haben, dass sich jedes Integral 1. Gattung homogen und linear ausdrücken lässt durch eine Anzahl von Integralen $y_{e,\,h}$, so soll diese Form im Folgenden ausschliesslich betrachtet werden. Durch lineare Transformation der Variabeln z kann ich es stets erreichen, dass einer der Verzweigungspunkte in den Nullpunkt fällt, so dass ich mich nur mit Integralen zu beschäftigen habe von folgender Form:

$$y = \int \frac{dz}{\prod_{\nu=0}^{\nu=m}(z-k_\nu)^{\varepsilon_\nu}}$$

wo die ε sämmtlich positive echte Brüche sind bis auf eins, das einen negativen Werth haben kann.

Uebrigens gilt alles Folgende auch für ganz beliebige Brüche ε mit dem Nenner n.

II.

Nach dem Vorgange des Herrn Fuchs[7]) lege ich jetzt einen sogenannten Hauptschnitt durch die sämmtlichen $m+2$ Verzweigungspunkte: $k_0, k_1, \ldots k_m, \infty$ (Fig. 1). In diesem Hauptschnitte sind die n Blätter der Riemann'schen Fläche unter einander verbunden und zwar muss die Verbindung eine derartige sein, dass nach einmaliger Umkreisung des Punktes k_ρ durch die Variabele z der Ausdruck:

$$(1) \qquad \sigma = \prod_{\nu=0}^{\nu=m} (z - k_\nu)^{\varepsilon_\nu} \qquad \left(\varepsilon_\nu = \frac{r_\nu}{n}\right)$$

übergeht in sich selbst, multiplicirt mit der Grösse:

$$\omega_\rho = \omega^{r_\rho}$$

Dabei ist ω eine primitive $n$te Wurzel der Einheit.

Eine solche Verbindung ist nun aber sehr leicht ausführbar und zwar in folgender Weise (Fig. 2):

Nehmen wir an, die Function σ gehe beim Ueberschreiten des Verzweigungsschnitts zwischen den singulären Punkten k_λ und $k_{\lambda-1}$ von unten nach oben über in: $\alpha_\lambda \cdot \sigma$, so geht σ bei einer vollständigen Umkreisung des Punktes k_ρ durch die Variabele z über in:

$$\sigma \cdot \frac{\alpha_{\rho+1}}{\alpha_\rho}$$

Aus der Vergleichung der beiden Resultate ergiebt sich dann die Relation:

$$(2) \qquad \frac{\alpha_{\rho+1}}{\alpha_\rho} = \omega_\rho$$

Diese Relation gilt für:

$$\varrho = 0, 1, 2 \ldots . m$$

wobei $\alpha_0 = 1$ ist.

---

[7]) Crelle, Bd. 71, S. 92.

Dann ergiebt sich aus Gleichung (2) sofort:

$$(3) \qquad \alpha_\rho = \prod_{\nu=0}^{\nu=\rho-1} \omega_\nu$$

Da die ω bekannt sind, so lässt es sich hiernach leicht bestimmen, welche Blätter der Riemann'schen Fläche in jedem einzelnen Theile des Hauptschnittes mit einander verbunden werden müssen und in welcher Reihenfolge dies zu geschehen hat, damit die Function σ auf der ganzen Fläche eindeutig definirt sei.

Auf der so construirten Fläche habe ich nun unser Integral:

$$y = \int \frac{dz}{\sigma}$$

zu betrachten.

Nach Riemann lässt[8]) sich jede mehrfach zusammenhängende Fläche vom Geschlecht p durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandeln. Diese Querschnitte können zurückgeführt werden auf ein System von in sich selbst zurücklaufenden geschlossenen Curven. Jedes Integral 1. Gattung, erstreckt über eine solche geschlossene Curve, ist gleich einem dem entsprechenden unbestimmten Integrale zugehörigen Periodicitätsmodul. Die Anzahl solcher Periodicitätsmoduln, zwischen denen keine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht, ist gleich der Anzahl der Querschnitte, welche genügt, die $2p$-fach zusammenhängende Fläche in eine einfach zusammenhängende zu verwandeln. Diese Anzahl ist $= 2p$.

In diesem Sinne betrachte ich jetzt unsere $n$blättrige Fläche.

Ich denke mir einen ganz beliebigen in sich selbst zurücklaufenden geschlossenen Weg construirt. Derselbe ist charakterisirt durch die Verzweigungspunkte, welche er umwindet, durch die Anzahl der Windungen, welche er um jeden Verzweigungspunkt macht und durch die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Punkte umwunden werden. Die Anzahl der von der vorliegenden geschlossenen Curve umwundenen Verzweigungspunkte sei ϱ, die Reihenfolge sei: $k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2} \ldots k_{\lambda_\rho}$, die Anzahl der Windungen sei: $i_{\lambda_1}, i_{\lambda_2} \ldots i_{\lambda_\rho}$. Der Verlauf der betreffenden Curve ist dann folgender (Fig. 3): Von dem in einem beliebigen Blatte

[8]) Crelle, Bd. 54.

liegenden Punkte z_0, in welchem die Function

$$\sigma = \prod_{\nu=0}^{\nu=m} (z - k_\nu)^{\frac{r_\nu}{n}}$$

den Werth $\omega_{\lambda_0}^{i_{\lambda_0}} . \sigma_0$ haben möge, gehe ich bis an den Punkt k_{λ_1} heran, umwinde diesen Punkt i_{λ_1} mal, wodurch ich nach jeder Windung in ein anderes Blatt gelange, gehe in demjenigen Blatte, in welchem ich mich zuletzt befinde, zu dem Punkte $z = z_0$, $\sigma = \omega_{\lambda_0}^{i_{\lambda_0}} . \omega_{\lambda_1}^{i_{\lambda_1}} . \sigma_0$. Dann gehe ich in demselben Blatte an k_{λ_2} heran, umwinde diesen Punkt i_{λ_2} mal, wodurch ich wieder in neue Blätter gelange, gehe in dem zuletzt erreichten Blatte zu: $z = z_0$, $\sigma = \omega_{\lambda_0}^{i_{\lambda_0}} . \omega_{\lambda_1}^{i_{\lambda_1}} . \omega_{\lambda_2}^{i_{\lambda_2}} . \sigma_0$ u. s. f.

Schliesslich gelange ich nach einer i_{λ_ρ} maligen Umwindung des Punktes k_{λ_ρ} zu der Stelle:

$$z = z_0, \quad \sigma = \prod_{h=0}^{h=\rho} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} . \sigma_0$$

Soll diese Stelle in demjenigen Blatte liegen, von welchem zuerst ausgegangen wurde, soll also der Weg wirklich ein geschlossener sein, so muss sein:

$$\prod_{h=1}^{h=\rho} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} = 1 \tag{4}$$

Ich kann mir den ganzen beschriebenen Weg unendlich nahe um die Verzweigungspunkte herumlegen; erstrecke ich dann das Integral über einen solchen geschlossenen Weg, so finde ich leicht den folgenden Werth für den betreffenden Periodicitätsmodul:

$$K = \sum_{r=1}^{r=\rho} (z_0, k_{\lambda_r}) \left(\prod_{h=0}^{h=r-1} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} - \prod_{h=0}^{h=r} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} \right) \tag{5}$$

Nun ist:

$$(z_0, k_{\lambda_r}) = (z_0, k_0) + \sum_{h=0}^{h=\lambda_r - 1} (k_h, k_{h+1})$$

Also:

$$K = (z_0,\ k_0) \sum_{r=1}^{r=\rho} \left(\prod_{h=0}^{h=r-1} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} - \prod_{h=0}^{h=r} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} \right) +$$

$$+ \sum_{h=0}^{h=m} A_h (k_h,\ k_{h+1})$$

wo die A lineare homogene Functionen von Differenzen der Wurzeln der Einheit sind.

Da ferner:

$$\sum_{r=1}^{r=\rho} \left(\prod_{h=0}^{r-1} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} - \prod_{h=0}^{r} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} \right) = \omega_{\lambda_0}^{i_{\lambda_0}} - \prod_{h=0}^{h=\rho} \omega_{\lambda_h}^{i_{\lambda_h}} = 0 \text{ (nach Gl. 4)}$$

so folgt:

$$K = \sum_{h=0}^{h=m} A_h (k_h,\ k_{h+1}) \tag{5a}$$

Hierbei bezeichne ich, analog der von Herrn Fuchs bei den hyperelliptischen Integralen gebrauchten Bezeichnungsweise, durch $(k_\lambda,\ k_{\lambda+1})$ die bestimmten Integrale, deren Grenzen die Verzweigungswerthe bilden:

$$(k_\lambda,\ k_{\lambda+1}) = \int_{k_\lambda}^{k_{\lambda+1}} \frac{dz}{\sigma}$$

Nach den obigen Ausführungen lässt sich nunmehr der folgende Satz für unser specielles Abel'sches Integral:

$$y = \int \frac{dz}{\Pi (z - k_\nu)^{\varepsilon_\nu}}$$

aufstellen:

Jeder Periodicitätsmodul lässt sich darstellen als homogene lineare Function der bestimmten Integrale von der Form $(k_\lambda,\ k_{\lambda+1})$. Die Coefficienten dieser Darstellung sind homogene lineare und ganzzahlige Functionen der Grössen:

$$1 - \omega^{\rho} \quad (\rho = 1,\ 2 \ldots . n - 1)$$

$$(6) \qquad K = \sum A_{\rho h} (1 - \omega^{\rho}) (k_h,\ k_{h+1})$$

$$h = 0,\ 1 \ldots m$$
$$\rho = 1,\ 2 \ldots n - 1$$

Dabei ist:

$$k_{m+1} = \infty$$

Da die Umkreisungen des unendlich fernen Punktes sich als Umkreisungen der $m + 1$ endlichen Verzweigungspunkte in umgekehrter Richtung auffassen lassen, so sind alle Wege, welche den Punkt ∞ umschliessen, zurückführbar auf solche Wege, welche nur endliche Verzweigungspunkte umschliessen. Zwischen den zugehörigen Periodicitätsmoduln müssen daher homogene lineare Relationen mit constanten Coefficienten bestehen. Hieraus folgt dann sehr leicht das Bestehen von mindestens einer Relation von der Form:

$$(7) \qquad \sum_{h=0}^{h=m} C_h \cdot (k_h,\ k_{h+1}) = 0$$

$$k_{m+1} = \infty$$

Die Coefficienten C sind homogene lineare und ganzzahlige Functionen der Grössen:

$$(1 - \omega^{\rho}) \qquad (\rho = 1,\ 2 \ldots n - 1)$$

Ob und unter welchen Umständen mehrere solcher Relationen bestehen können, wäre noch näher zu untersuchen.

III.

Ich gehe jetzt dazu über, die oben betrachteten bestimmten Integrale: $(k_\rho,\ k_{\rho+1})$ $(\rho = 0,\ 1,\ \ldots\ m - 1)$, welche in so enger Beziehung zu den Periodicitätsmoduln stehen, als Functionen eines in ihnen enthaltenen Parameters zu studieren. Hierzu wähle ich einen der Verzweigungswerthe und zwar, wegen der Willkürlichkeit der Bezeichnungen, den Werth:

$$k_0 = k$$

Ich werde also zu untersuchen haben, in welcher Weise sich die m durch bestimmte Integrale ausdrückbaren Functionen verändern werden bei einem beliebigen Wege, den ich die Variabele k beschreiben lasse. Bei Behandlung dieser Frage werde ich mich genau der von Herrn Fuchs in der mehrfach erwähnten Arbeit angewandten Methode anschliessen.

Der Hauptschnitt geht von k über $k_1, k_2, \ldots . k_m$ in's Unendliche (Fig. 1), da angenommen wird, dass der unendlich ferne Punkt zu den Verzweigungspunkten gehört.

Statt der m Functionen:

$$(k_\rho, k_{\rho+1}) \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots . m-1)$$

werde ich, wegen der Uebersichtlichkeit der Resultate, es vorziehen, die folgenden m Functionen einzuführen:

$$(k, k_\rho) \qquad (\varrho = 1, 2 \ldots m)$$

Aus den Veränderungen dieser letzteren lassen sich dann die Veränderungen der ersteren Functionen sehr einfach ableiten, da:

$$(k_\rho, k_{\rho+1}) = (k, k_{\rho+1}) - (k, k_\rho)$$

Es handelt sich also um die folgenden bestimmten Integrale, welche untersucht werden sollen in Bezug auf die Veränderungen, denen sie bei Aenderung der Variabeln k unterworfen sind:

$$(k, k_\rho) = \int_k^{k_\rho} \frac{dz}{\sigma} = \int_k^{k_\rho} \frac{dz}{\prod_{\nu=0}^{m} (z - k_\nu)^{\frac{r_\nu}{n}}} =$$

$$= \int_k^{k_\rho} \frac{dz}{(z-k)^{\frac{r_0}{n}} \prod_{\nu=1}^{m} (z - k_\nu)^{\frac{r_\nu}{n}}} .$$

$$(\varrho = 1, 2 \ldots . m)$$

Lasse ich zuerst die Variabele k einen vollständigen Umlauf beschreiben, welcher keinen der übrigen Verzweigungspunkte einschliesst, so ergiebt sich Folgendes:

Die Function σ bleibt ungeändert für jeden Werth von z, welcher nicht innerhalb der von k beschriebenen geschlossenen

Curve liegt, der Hauptschnitt wird um die geschlossene Curve U vermehrt (Fig. 4). Bezeichne ich nach dem Vorgange des Herrn Fuchs diejenige Function, in welche $(k,\ k_\rho)$ nach einem Umlaufe übergeht, durch: $(k,\ k_\rho)'$, so erhalte ich in diesem Falle:

$$(k,\ k_\rho)' = \int_U \frac{dz}{\sigma} + (k,\ k_\rho)$$

oder, da:

$$\int_U \frac{dz}{\sigma} = 0$$

$$(k,\ k_\rho)' = (k,\ k_\rho)$$

Wir haben also das Resultat:

Jede der m Functionen $(k,\ k_\rho)$ bleibt vollständig ungeändert, wenn die Variabele k einen beliebigen Umlauf beschreibt, welcher keinen der $m-1$ Verzweigungspunkte $k_1,\ k_2 \ldots\ldots k_m$ einschliesst.

Wir haben daher nur noch zu fragen: Was wird aus den m Functionen $(k,\ k_\rho)$, wenn wir die Variabele k einen geschlossenen Weg beschreiben lassen, der einen der übrigen Verzweigungspunkte umgiebt?

Ich lasse also jetzt k einen vollständigen Umlauf machen um den Punkt k_λ. Alsdann tritt Folgendes ein (Fig. 5):

σ verändert sich in $\omega_0 . \sigma$, so lange z sich innerhalb des Umlaufs befindet; für jedes z ausserhalb desselben behält dagegen σ seinen ursprünglichen Werth bei.

Zu dem ursprünglichen Hauptschnitt tritt noch die geschlossene Curve U hinzu.

Um die Veränderungen, welche die Functionen $(k,\ k_\rho)$ nach dem Umlaufe von k um k_λ erleiden, näher zu untersuchen, sind die folgenden 3 Fälle zu unterscheiden:

1. $\varrho < \lambda$
2. $\varrho = \lambda$
3. $\varrho > \lambda$

1.

Im ersten Falle besteht der Weg, über welchen das veränderte Integral zu erstrecken ist, aus dem Stück k_ρ, k und der geschlossenen Curve U (Fig. 6).

Also wird sein:

$$(k_\rho,\ k)' = (k_\rho,\ k) + \int_U \frac{dz}{\sigma}$$

Nun ist aber:

$$\int_U \frac{dz}{\sigma} = (k,\ \mathfrak{a}) + (\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b},\ k)$$

Ich kann die geschlossene Curve unendlich nahe um k_λ herumlegen; dann ist:

$$(k,\ \mathfrak{a}) = (k,\ k_\lambda)$$
$$(\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}) = 0$$
$$(\mathfrak{b},\ k) = (k_\lambda,\ k) \cdot \frac{1}{\omega_\lambda}$$

Wir erhalten demnach das Resultat:

$$(k_\rho,\ k)' = (k_\rho,\ k) + \left(1 - \frac{1}{\omega_\lambda}\right)(k,\ k_\lambda) \quad (\varrho < \lambda)$$

2.

In diesem Falle ist das zu betrachtende Stück des Hauptschnitts, k, k_λ, nach dem Umlaufe um k_λ übergegangen in U und das von U umschlossene Stück k, k_λ (Fig. 7). Für jeden Punkt z im Innern des Umlaufs verwandelt sich σ in $\omega_0 \cdot \sigma$; also:

$$(k_\lambda,\ k)' = \frac{1}{\omega_0}(k_\lambda,\ k) + \frac{1}{\omega_0}\int_U \frac{dz}{\sigma}$$

Den Werth des letzten Integrals hatten wir oben ermittelt. Es ergiebt sich sonach:

$$(k_\lambda,\ k)' = (k_\lambda,\ k) \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot \omega_\lambda}$$

3.

Der Integrationsweg besteht aus k_ρ, k und U. (Fig. 8.) Also wird:

$$(k_\rho,\ k)' = (k_\rho,\ k) + \frac{1}{\omega_0}\int_U \frac{dz}{\sigma}$$

oder, nach Einsetzung des gefundenen Werthes für das letzte Integral:

$$(k_\rho,\ k)' = (k_\rho,\ k) + \frac{1}{\omega_0}\left(1 - \frac{1}{\omega_\lambda}\right)(k,\ k_\lambda) \qquad \varrho > \lambda$$

Schliesslich bleibt noch zu untersuchen, was aus unseren Functionen $(k,\ k_\rho)$ wird, wenn die Variabele k einen Umlauf um den unendlich fernen Punkt beschreibt. Ein solcher Umlauf lässt sich auffassen als ein Umlauf um sämmtliche im Endlichen liegende Verzweigungspunkte in unendlicher Entfernung und im entgegengesetzten Sinne (Fig. 9).

Bei einem solchen Umlaufe verwandelt σ sich in $\frac{\sigma}{\omega_0}$ für jeden im Innern gelegenen Punkt z.

Ich habe also zunächst die Veränderungen der Functionen

$$(k,\ k_\rho)\ (\varrho = 1,\ 2 \ldots m)$$

bei diesem Umlaufe zu betrachten. Der Weg besteht aus k_ρ, k und U.

Also wird:

$$(k_\rho,\ k)' = \omega_0\,(k_\rho,\ k) + \omega_0 \int_U^{\cdot} \frac{dz}{\sigma}$$

Das letztere Integral hat nun den Werth:

$$\int_U^{\cdot} \frac{dz}{\sigma} = (k,\ \infty)\left(1 - \prod_{\nu=1}^{\nu=m} \omega_\nu\right)$$

Also das Resultat:

$$(k_\rho,\ k)' = \omega_0\,(k_\rho,\ k) + \omega_0\left(1 - \prod_{\nu=1}^{m} \omega_\nu\right)(k,\ \infty)$$

Die Aenderungen der Function $(k,\ \infty)$ bei dem Umlaufe um den unendlich fernen Punkt sind nun noch zu ermitteln.

Der Weg besteht aus k, ∞ und U; also:

$$(\infty,\ k)' = (\infty,\ k)_{\omega_0} + \omega_0 \int_U^{\cdot} \frac{dz}{\sigma}$$

oder, nach Obigem:

$$(\infty, k)' = (\infty, k) \cdot \prod_{\nu=0}^{\nu=m} \omega_\nu$$

Wir kennen sonach jetzt alle Veränderungen, welche mit unseren bestimmten Integralen geschehen, wenn wir die Variabele k einen ganz beliebigen Weg in der unendlichen Ebene beschreiben lassen.

Da bewiesen wurde, dass die Function (k, ∞) eine homogene lineare Function der übrigen m Integrale (k, k_ρ) sein muss, so lässt sich das soeben Gefundene als allgemeines Resultat in folgender Weise ausdrücken:

Die m bestimmten Integrale (k, k_ρ) besitzen die Eigenschaft, nach irgend einem beliebigen Umlaufe der Variabelen k überzugehen in homogene lineare Functionen derselben m Grössen und zwar sind die Coefficienten dieser linearen Relationen rationale Functionen von Wurzeln der Einheit.

Die Coefficienten werden gefunden durch Combination der gefundenen elementaren Substitutionen, welche zu den Veränderungen nach einem Umlaufe um einen einzigen Verzweigungspunkt gehören.

Für den Fall der hyperelliptischen Integrale ist:

$$\omega_\rho = -1 \qquad (\varrho = 0,\ 1 \ldots m)$$

und

$$\prod_{\nu=0}^{m} \omega_\nu = -1$$

falls der unendlich ferne Punkt Verzweigungspunkt ist.

In diesem Falle erhalte ich für einen Umlauf um einen im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt k_λ die folgenden 3 Formeln:

$$(k_\rho, k)' = (k_\rho, k) + 2\,(k, k_\lambda) \qquad (\varrho < \lambda)$$

$$(k, k_\lambda)' = (k, k_\lambda)$$

$$(k_\rho, k)' = (k_\rho, k) - 2\,(k, k_\lambda) \qquad (\varrho > \lambda)$$

Für den unendlich fernen Punkt ergiebt sich noch:

$$(k_\rho, k)' = -(k_\rho, k) - 2\,(k, \infty) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots m)$$

$$(k, \infty)' = -(k, \infty)$$

Aus diesen Formeln ergeben sich nun sofort die von Herrn Fuchs ermittelten Relationen, wenn nur berücksichtigt wird, dass:

$$(k_\mu, k_{\mu+1}) = (k_\mu, k) - (k_{\mu+1}, k)$$

und μ^0 an die Stelle von k gesetzt wird.

Für $\lambda = 1$ giebt es kein $\varrho < \lambda$, während für $\lambda = m - 1$ (bei Herrn Fuchs: $\lambda = n - 1$) die Möglichkeit $\varrho > \lambda$ in Fortfall kommt.

IV.

Wie schon erwähnt wurde, hat Herr Fuchs[9]) bewiesen, dass die Periodicitätsmoduln der allgemeinen Abel'schen Integrale, als Functionen eines Verzweigungswerthes aufgefasst, linearen Differentialgleichungen von der Ordnung $2p$ genügen, deren Coefficienten rationale Functionen der sämmtlichen Verzweigungswerthe sind. Die Methode, welche Herr Fuchs[10]) anwendet, solche Differentialgleichungen im Falle hyperelliptischer Integrale wirklich aufzustellen, lässt sich sehr wohl auf unsern Fall allgemeiner binomischer Gleichungen anwenden, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Und zwar werden wir auf diesem Wege zu Differentialgleichungen von der Ordnung m gelangen.

Nun ist aber stets:

$$m < 2p$$

ausgenommen für $n = 2$, wo:

$$m = 2p$$

ist.

Denn, wir hatten gefunden:

$$2p = n \cdot \sum_{\nu=0}^{\nu=m+1} \left(1 - \frac{1}{n_\nu}\right) - 2(n-1)$$

Ist nun $n \neq 2$, so sind alle Zahlen n_ν, als Theiler von n, $\geqq 2$; also:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=m+1} \left(1 - \frac{1}{n_\nu}\right) > \frac{m+2}{2}$$

---

[9]) Crelle, Bd. 73.

[10]) Crelle, Bd. 71, S. 101—121.

Hieraus folgt:

$$2p > n \cdot \frac{m+2}{2} - 2(n-1)$$

oder:

$$2p - m > \frac{1}{2}(n-2)(m-2)$$

woraus sich, da $n > 2$, sofort ergiebt:

$$2p > m$$

Für $n = 2$ ist:

$$n_\nu = 2 \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots\ m+1)$$

Die obige Formel giebt dann:

$$2p = m$$

Damit nun die sämmtlichen Periodicitätsmoduln eines Integrals vom Geschlecht p einer und derselben Differentialgleichung $m$ter Ordnung Genüge leisten, ist es nothwendig, dass für $n > 2$ zwischen den $2p$ Periodicitätsmoduln eine Anzahl homogener linearer Relationen mit in k constanten Coefficienten bestehen.

Solche Relationen haben wir unter II. kennen gelernt.

Ich betrachte wieder, wie am Anfange dieser Arbeit, die Function von z:

$$y = \int \frac{dz}{(z-k)^{\varepsilon_0} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (z-k_\nu)^{\varepsilon_\nu}}$$

wobei ich zur Abkürzung gesetzt habe:

$$\varepsilon_\nu = \frac{r_\nu}{n} \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots\ m)$$

Wenn es mir nun möglich ist, nach dem Vorgange des Herrn Fuchs[11]), eine Differentialgleichung für y als abhängige und k als unabhängige Variabele zu finden von der Form:

$$(1) \qquad \sum_{\mu=0}^{\mu=\rho} q_\mu \cdot \frac{\partial^\mu y}{\partial k^\mu} = \int \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

wo die q auf der linken Seite rationale Functionen von k sind,

[11]) Crelle, Bd. 71, S. 101—121.

während R eine algebraische Function von z sein muss, so ergiebt sich Folgendes:

Die Periodicitätsmoduln K des Integrals y genügen der linearen Differentialgleichung ϱter Ordnung:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\rho} q_\mu \cdot \frac{\partial^\mu K}{\partial k^\mu} = 0 \tag{2}$$

Die Richtigkeit dieser Bemerkung ist leicht erkennbar.

Denn:

Erstrecke ich die Integration auf beiden Seiten der Differentialgleichung (1) über irgend einen geschlossenen Weg auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche, so erhält das Integral rechts den Werth 0, während das Integral y gleich dem zu dem betreffenden Querschnitte gehörigen Periodicitätsmodul K wird[12]).

Ebenso wird aus $\frac{\partial^\mu y}{\partial k^\mu}$ allgemein:

$$\frac{\partial^\mu K}{\partial k^\mu} \qquad (\mu = 1,\ 2 \ldots .)$$

Nehmen wir also an, es giebt eine Differentialgleichung von der Form 1). Um die Coefficienten q zu bestimmen, sind die Ausdrücke für y und die Ableitungen nach k einzusetzen.

Aus:

$$y = \int \frac{dz}{(z-k)^{\varepsilon_0} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (z-k_\nu)^{\varepsilon_\nu}}$$

ergiebt sich:

$$\frac{\partial^\mu y}{\partial k^\mu} = \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h) \cdot \int \frac{dz}{(z-k)^{\varepsilon_0+\mu} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (z-k_\nu)^{\varepsilon_\nu}} =$$

$$= \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h) \cdot \int \frac{dz}{(z-k)^\mu \cdot \sigma} \qquad (\mu = 1,\ 2 \ldots .) \tag{3}$$

Unsere Gleichung (1) erhält alsdann, nach Einsetzen dieser Ausdrücke, die Form:

[12]) Vergl. Fuchs (Crelle, Bd. 71).

$$(4) \qquad \int \frac{\partial R}{\partial z} \cdot dz = \int \frac{dz}{\sigma} \left(q_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=\rho} \frac{q_\mu \cdot \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h)}{(z-k)^\mu} \right)$$

Hieraus folgt sofort durch Differentiation der ganzen Gleichung nach z:

$$(5) \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{\sigma} \cdot \left(q_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=\rho} \frac{q_\mu \cdot \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h)}{(z-k)^\mu} \right)$$

Setze ich nun:

$$R = (z-k)^{-\varepsilon_0 - m + 1} \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (z-k_\nu)^{-\varepsilon_\nu + 1}$$

und:

$$\varrho = m$$

so erhalte ich:

$$\frac{\partial R}{\partial z} = R \cdot \left(\frac{\varepsilon_0 + m - 1}{z-k} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varepsilon_\nu - 1}{z-k_\nu} \right)$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\prod_{\nu=0}^{\nu=m} (z-k_\nu)}{(z-k)^m}$$

Diese Werthe in (5) eingesetzt, ergiebt:

$$(6) \qquad \prod_{\nu=0}^{\nu=m} (z-k_\nu) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0 + m - 1}{z-k} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varepsilon_\nu - 1}{z-k_\nu} \right) =$$

$$= q_0 \cdot (z-k)^m + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h) \; (z-k)^{m-\mu}$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf z auf beiden Seiten ganz und rational vom Grade m. Setze ich nun die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von $z-k$ auf beiden Seiten einander gleich, so erhalte ich $m+1$ lineare Gleichungen, aus denen

sich die Coefficienten q als rationale Functionen der Grössen k_ν $(\nu = 0,\ 1 \ldots m)$ bestimmen lassen.

Ich setze zur Abkürzung:

$$T = \prod_{\nu=0}^{\nu=m} (z - k_\nu) \cdot \left(\frac{\varepsilon_0 + m - 1}{z - k} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varepsilon_\nu - 1}{z - k_\nu} \right)$$

so dass Gleichung (6) lautet:

$$(6a) \qquad T = q_0 (z-k)^m + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h) \cdot q_\mu \cdot (z-k)^{m-\mu}$$

Hieraus erhalte ich dann die Coefficienten q in folgender Form:

$$q_\mu = \frac{1}{(m-\mu)! \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h)} \cdot \left\{ \frac{\partial^{m-\mu} T}{\partial z^{m-\mu}} \right\}_{z=k}$$

$$(\mu = 1,\ 2 \ldots . m)$$

$$q_0 = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m T}{\partial z^m} \right\}_{z=k}$$

So ergiebt sich die gesuchte Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln K in folgender Gestalt:

$$(7) \qquad \frac{1}{m!} \left\{ \frac{\partial^m T}{\partial z^m} \right\}_{z=k} \cdot K + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{(m-\mu)! \prod_{h=0}^{h=\mu-1} (\varepsilon_0 + h)} \cdot \left\{ \frac{\partial^{m-\mu} T}{\partial z^{m-\mu}} \right\}_{z=k} \cdot \frac{\partial^\mu K}{\partial k^\mu} = 0$$

Der Coefficient q_μ ist in Bezug auf k vom Grade μ.

Die Coefficienten der beiden höchsten Ableitungen sind:

$$q_m = \frac{\varepsilon_0 + m - 1}{\prod_{h=0}^{h=m-1} (\varepsilon_0 + h)} \cdot \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (k - k_\nu)$$

$$q_{m-1} = \frac{1}{\prod_{h=0}^{h=m-2} (\varepsilon_0 + h)} \cdot \left\{ (\varepsilon_0 + m - 1) \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (k - k_\nu) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{1}{k - k_\nu} + \right.$$

$$\left. + \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (k - k_\nu) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varepsilon_\nu - 1}{k - k_\nu} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{h=0}^{h=m-2} (\varepsilon_0 + h)} \cdot \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (k - k_\nu) \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu + m - 2}{k - k_\nu}$$

Um einen auch für $\mu = 0$ geltenden Ausdruck für den constanten Factor in dem für q_μ ermittelten Werthe zu haben, benutze ich noch die von Gauss eingeführten sogenannten Π-Functionen, welche die Fundamentaleigenschaft besitzen:

$$\Pi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \,.\, \Pi(\mathfrak{a} - 1)$$

$$\Pi(0) = 1$$

Alsdann wird:

$$q_\mu = \frac{\Pi(\varepsilon_0 - 1)}{(m-\mu)!\, \Pi(\varepsilon_0 + \mu - 1)} \cdot \left\{ \frac{\partial^{m-\mu} T}{\partial z^{m-\mu}} \right\}_{z=k}$$

$$(\mu = 0, 1, 2 \ldots . m)$$

Hierdurch erhält unsere Differentialgleichung die Form:

$$(7\,\mathrm{a}) \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{1}{(m-\mu)!\, \Pi(\varepsilon_0 + \mu - 1)} \cdot \left\{ \frac{\partial^{m-\mu} T}{\partial z^{m-\mu}} \right\}_{z=k} \cdot \frac{\partial^\mu K}{\partial k^\mu} = 0$$

Besonders einfach durch k ausdrückbar werden die Coefficienten q in dem Falle:

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon \qquad (\nu = 0, 1 \ldots m)$$

Alsdann ist:

$$T = \prod_{\nu=0}^{\nu=m} (z - k_\nu) \cdot \left(\frac{\varepsilon + m - 1}{z - k} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{\varepsilon - 1}{z - k_\nu} \right)$$

Setze ich zur Abkürzung:

$$S = \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (z - k_\nu)$$

so ist:

$$T = (\varepsilon_0 + m - 1)\, S + (\varepsilon - 1)\,(z - k)\, \frac{\partial S}{\partial z}$$

Hieraus folgt durch fortgesetzte Differentiation nach z:

$$\frac{\partial^\mu T}{\partial z^\mu} = [m + (\mu + 1)(\varepsilon - 1)]\, \frac{\partial^\mu S}{\partial z^\mu} + (z - k)(\varepsilon - 1)\, \frac{\partial^{\mu+1} S}{\partial z^{\mu+1}}$$

Also:

$$\left\{\frac{\partial^\mu T}{\partial z^\mu}\right\}_{z=k} = [m + (\mu + 1)(\varepsilon - 1)] \left\{\frac{\partial^\mu S}{\partial z^\mu}\right\}_{z=k}$$

Die Function S enthält die Variabele k gar nicht; somit ist:

$$\left\{\frac{\partial^\mu S}{\partial z^\mu}\right\}_{z=k} = \frac{\partial^\mu P}{\partial k^\mu}$$

wenn ich die Bezeichnung einführe:

$$P = \{S\}_{z=k} = \prod_{\nu=1}^{\nu=m} (k - k_\nu)$$

Dies giebt mir dann:

$$\left\{\frac{\partial^\mu T}{\partial z^\mu}\right\}_{z=k} = [m + (\mu + 1)(\varepsilon - 1)]\, \frac{\partial^\mu P}{\partial k^\mu}$$

Und die Differentialgleichung lautet in diesem speciellen Falle:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} \frac{m\varepsilon + (1-\mu)(\varepsilon - 1)}{(m-\mu)!\; \Pi(\varepsilon + \mu - 1)}\, \frac{\partial^{m-\mu} P}{\partial k^{m-\mu}} \cdot \frac{\partial^\mu K}{\partial k^\mu} = 0$$

Wie leicht zu erkennen ist, sind in diesem Falle die Coefficienten der Differentialgleichung einfach gleich den elementaren symmetrischen Functionen der m Grössen $k - k_\nu$ ($\nu = 1, 2 \ldots m$), multiplicirt mit von den k_ν unabhängigen constanten Factoren.

Aber auch in dem ganz allgemeinen Falle lässt sich eine ähnliche Umformung mit den Coefficienten vornehmen.

Setze ich nämlich:

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=m}(z-k_\nu)\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{\varepsilon_\nu-1}{z-k_\nu}=U$$

so ist:

$$T=(\varepsilon_0+m-1)\,S+U(z-k)$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^\mu T}{\partial z^\mu}=(\varepsilon_0+m-1)\frac{\partial^\mu S}{\partial z^\mu}+\mu\,\frac{\partial^{\mu-1}U}{\partial z^{\mu-1}}+(z-k)\frac{\partial^\mu U}{\partial z^\mu}$$

Also:

$$\left\{\frac{\partial^\mu T}{\partial z^\mu}\right\}_{z=k}=(\varepsilon_0+m-1)\left\{\frac{\partial^\mu S}{\partial z^\mu}\right\}_{z=k}+\mu\left\{\frac{\partial^{\mu-1}U}{\partial z^{\mu-1}}\right\}_{z=k}$$

Dies giebt, wenn ich setze:

$$\{U\}_{z=k}=L$$

$$\left\{\frac{\partial^\mu T}{\partial z^\mu}\right\}_{z=k}=(\varepsilon_0+m-1)\frac{\partial^\mu P}{\partial k^\mu}+\mu\frac{\partial^{\mu-1}L}{\partial k^{\mu-1}}$$

$$(\mu=0,\ 1,\ 2\ldots m)$$

Unsere Differentialgleichung lautet also:

$$(7\,c)\qquad\sum_{\mu=0}^{\mu=m}\frac{1}{(m-\mu)!\,\Pi(\varepsilon_0+\mu-1)}\cdot\left[(\varepsilon_0+m-1)\frac{\partial^{m-\mu}P}{\partial k^{m-\mu}}+\right.$$

$$\left.+(m-\mu)\frac{\partial^{m-\mu-1}L}{\partial k^{m-\mu-1}}\right]=0$$

Dabei ist:

$$P=\prod_{\nu=1}^{\nu=m}(k-k_\nu)$$

$$L=\prod_{\nu=1}^{\nu=m}(k-k_\nu)\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{\varepsilon_\nu-1}{k-k_\nu}=0$$

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen, wie sie von Herrn Fuchs[13]) begründet und in seinen darauf bezüglichen

[13]) Crelle, Bd. 66, 68.

berühmten Abhandlungen und Vorlesungen mitgetheilt worden, ist uns nun Folgendes über die Natur der Integrale einer solchen Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Punkte bekannt:

I. Die Integrale einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, können sich nur an denjenigen Stellen, an denen der Coefficient der höchsten Ableitung verschwindet und an der Stelle $x = \infty$ singulär verhalten.

II. Es existirt stets mindestens ein Integral von der Form:

$$y = (x - a)^r \cdot v$$

gültig in der Umgebung des singulären Punktes $x = a$, wobei v eine nach ganzen, positiven und negativen Potenzen von $x - a$ fortschreitende und in der ganzen Umgebung von $x - a$ convergente Reihe bedeutet. Sind die negativen Potenzen nur in endlicher Anzahl vorhanden, so ist r die Wurzel einer algebraischen Gleichung $m$ten Grades, welche die determinirende Fundamentalgleichung genannt wird.

III. Hat die determinirende Fundamentalgleichung ϱ Wurzeln, welche nicht um ganze Zahlen von einander verschieden sind, so hat die gegebene Differentialgleichung in der Umgebung von $x = a$ mindestens ϱ verschiedene Integrale von der Form:

$$y_\lambda = (x - a)^{r_\lambda} v_\lambda \qquad (\lambda = 1,\ 2 \ldots \varrho)$$

und höchstens so viele, als überhaupt verschiedene Wurzeln r vorhanden sind. Dabei sind die v_λ Potenzreihen der oben durch v bezeichneten Art.

IV. Ein Fundamental-System von Integralen in der Umgebung des singulären Punktes $x = a$ wird gebildet aus den m Functionen:

$$y_{\mu,\lambda} = (x - a)^{r_\mu} v_{\mu\lambda} \cdot [\log (x - a)]^\lambda$$

$$\begin{pmatrix} \mu = 1,\ 2, \ldots \varrho \\ \lambda = 0,\ 1, \ldots h_\mu - 1 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind die v nach ganzen Potenzen von $x - a$ fortschreitende, in der Umgebung von $x = a$ convergente Reihen. Die ganze Zahl ϱ bezeichnet die Anzahl der verschiedenen Wurzeln r, während h_μ höchstens gleich der Anzahl der gleichen

Wurzeln r_μ ist, welche die determinirende Fundamentalgleichung für den betreffenden singulären Punkt besitzt.

Sind mehrere der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung einander absolut gleich, so müssen Logarithmen auftreten; sind diese Wurzeln nur um ganze Zahlen verschieden, so können Logarithmen auftreten.

V. In der Umgebung des singulären Punktes $x = \infty$ lauten die betreffenden Entwicklungen:

$$y_{\mu,\lambda} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_\mu} \cdot v_{\mu\lambda} \cdot \left[\log \frac{1}{x}\right]^\lambda$$

Dabei sind die v nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickelbare, in der Umgebung des unendlich fernen Punktes convergente Reihen. Die r_μ sind die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung für den Punkt $x = \infty$.

Um die determinirende Fundamentalgleichung für $x = \infty$ zu finden, habe ich die Differentialgleichung durch Einsetzen von $x = \frac{1}{t}$ zu transformiren in eine neue Gleichung zwischen y und t und für diese letztere alsdann die determinirende Fundamentalgleichung für den singulären Punkt $t = 0$ aufzusuchen.

Schreibe ich unsere Differentialgleichung in der Form:

$$\sum_{h=0}^{h=m} p_{m-h} \frac{\partial^h K}{\partial k^h} = 0$$

$$p_{m-h} = \frac{q_h}{q_m} \qquad (p_0 = 1)$$

so lautet die determinirende Fundamentalgleichung für einen im Endlichen gelegenen singulären Punkt k_ν:

$$\sum_{h=0}^{h=m} \frac{r!}{(r-m+h)!} \lim \left\{(k-k_\nu)^h \cdot p_h\right\}_{k=k_\nu} = 0$$

Auf unsere Differentialgleichung 7 resp. 7c angewandt, erhalte ich:

$$p_0 = 1$$

$$\lim \left\{p_1 (k - k_\nu)\right\}_{k = k_\nu} = \varepsilon_0 + \varepsilon_\nu + m - 2$$

$$\lim \left\{p_h (k - k_\nu)^h\right\}_{k = k_\nu} = 0$$

für: $$h = 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ m.$$

Also:

$$-\frac{r!}{(r-m)!} + \frac{r!}{(r-m+1)!} \cdot (\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu + m - 2) = 0$$

oder:

$$\frac{r!}{(r-m+1)!} \cdot (r + \varepsilon_0 + \varepsilon_\nu - 1) = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ m-2;\quad 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_\nu$$

Die Gleichung hat nur dann gleiche Wurzeln, wenn $\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu$ einen der Werthe: $1,\ 0,\ -1,\ -2,\ \ldots\ -(m-3)$ hat; jedenfalls besitzt sie $m-1$ Wurzeln, welche ganze Zahlen sind, während die $m$te Wurzel eine positive oder negative gebrochene Zahl sein kann.

Nach den oben angeführten allgemeinen Principien folgt zunächst, dass die Differentialgleichung mindestens ein Integral besitzt von der Form:

$$w = \sum_{h=\rho}^{h=\infty} C_h (k - k_\nu)^h$$

Dann muss sein:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} q_\mu \frac{\partial^\mu w}{\partial k^\mu} = 0$$

Nun ist:

$$\frac{\partial^\mu w}{\partial k^\mu} = \sum_{h=\rho}^{h=\infty} C_h \frac{h!}{(h-\mu)!} (k - k_\nu)^{h-\mu}$$

Hieraus folgt sofort:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} q_\mu \sum_{h=\rho}^{h=\infty} C_h \frac{h!}{(h-\mu)!} (k-k_\nu)^{h-\mu} = 0$$

Setze ich:

$$q_\mu = \sum_{i=0}^{i=\mu} a_{\mu i} (k-k_\nu)^i$$

so wird aus der letzten Gleichung:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} \left(\sum_{i=0}^{i=\mu} a_{\mu i} (k-k_\nu)^i \cdot \sum_{h=\rho}^{h=\infty} C_h \frac{h!}{(h-\mu)!} (k-k_\nu)^{h-\mu} \right) = 0$$

Hieraus ergiebt sich alsdann, da jeder Coefficient einer Potenz von $k - k_\nu$ Null sein muss, eine Recursionsformel für die C von der Form:

$$\sum_{h=0}^{h=m-1} A_{ih} \cdot C_{i+h} = 0$$

Aus der Discussion dieser Formel unter Berücksichtigung der für die q gefundenen Werthe lässt sich dann allgemein ermitteln, dass es stets $m-1$ Integrale der Differentialgleichung giebt, welche sich in der Umgebung von $k = k_\nu$ in eine convergente Potenzreihe entwickeln lassen. Ich werde diesen Beweis später für das specielle Beispiel $m = 3$ ausführlich geben.

Ist $\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu$ keine ganze Zahl, so besitzt die Differentialgleichung stets noch ein $m$tes Integral von der Form:

$$w_m = (k-k_\nu)^{-\varepsilon_0-\varepsilon_\nu} v_m$$

wo v_m eine convergente Potenzreihe bedeutet.

Ist dagegen $\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu$ eine positive oder negative ganze Zahl, so kann das $m$te Integral auch die Form haben:

$$w_m = v_m \cdot \log (k-k_\nu)$$

Die bestimmten Integrale: (k, k_ρ) $(\varrho = 1, 2 \ldots m)$, welche sich nur durch einen constanten Factor von den Periodicitätsmoduln unterscheiden und somit Integrale unserer Differentialgleichung sind, lassen sich daher in folgender Form darstellen:

(a) $$(k,\ k_\rho) = \mathfrak{v}_\rho + C_{m,\rho}\ (k - k_\nu)^{-\varepsilon_0 - \varepsilon_\nu} \cdot v_m$$

respective:

(b) $$(k,\ k_\rho) = \mathfrak{v}_\rho + C_{m,\rho} \log (k - k_\nu) \cdot v_m$$

Dabei ist:

$$\mathfrak{v}_\rho = \sum_{h=1}^{h=m-1} C_{h\rho} \cdot v_h$$

Die v sind in der Umgebung von $k = k_\nu$ convergente Potenzreihen. Die Form a gilt, wenn $\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu$ keine ganze Zahl ist, während der Fall b nur eintreten kann, wenn $\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu$ eine ganze Zahl wird.

Ich lasse jetzt die Variabele k einen Umlauf um k_ν machen. Alsdann wird:

(a) $$(k,\ k_\rho)' = (k,\ k_\rho) + C_{m,\rho}\ (k - k_\nu)^{-\varepsilon_0 - \varepsilon_\nu}\ v_m \left(\frac{1}{\omega_0\ \omega_\nu} - 1\right)$$

respective:

(b) $$(k,\ k_\rho)' = (k,\ k_\rho) + C_{m,\rho} \cdot v_m \cdot 2\pi i$$

Nun hatte ich aber früher auf ganz anderm Wege und zwar durch Betrachtung der Veränderungen, denen der Hauptschnitt nach einem Umlaufe unterworfen ist, die folgenden Resultate erhalten:

1. $$(k,\ k_\nu)' = \frac{1}{\omega_0\ \omega_\nu}\ (k,\ k_\nu) \quad (\varrho = \nu)$$

2. $$(k,\ k_\rho)' = (k,\ k_\rho) + \left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right)\ (k,\ k_\nu) \qquad (\varrho < \nu)$$

3. $$(k,\ k_\rho)' = (k,\ k_\rho) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right)\ (k,\ k_\nu) \qquad (\varrho > \nu)$$

Hieraus ergeben sich durch Verbindung mit a und b die folgenden 6 Fälle:

1 a)

$$(k,\ k_\nu)\left(1 - \frac{1}{\omega_0\ \omega_\nu}\right) + C_{m\nu}\, v_m\ (k - k_\nu)^{-\varepsilon_0 - \varepsilon_\nu}\left(\frac{1}{\omega_0\ \omega_\nu} - 1\right) = 0$$

Das ist:

$$(k,\ k_\nu) = C_{m\,\nu} \cdot v_m\,(k-k_\nu)^{-\varepsilon_0-\varepsilon_\nu} = (k-k_\nu)^{-\varepsilon-\varepsilon_\nu} \cdot u$$

wo u eine convergente Potenzreihe ist.

1b)

$$(k,\ k_\nu)\left(1-\frac{1}{\omega_0\,\omega_\nu}\right) + C_{m\,\nu}\,v_m \cdot 2\,\pi i = 0$$

In diesem Falle ist $\varepsilon_0 + \varepsilon_\nu$ gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl, oder:

$$\omega_0\,\omega_\nu = 1$$

Also muss sein:

$$C_{m,\,\nu} = 0$$

Wir haben somit:

$$(k,\ k_\nu) = \mathfrak{v}_\nu$$

d. h. $(k,\ k_\nu)$ ist gleich einer in der Umgebung von $k = k_\nu$ convergenten Potenzreihe.

2a)

$$(k,\ k_\nu)\left(\frac{1}{\omega_\nu}-1\right) - \frac{C_{m\,\rho}}{C_{m\,\nu}}\ (k,\ k_\nu)\left(\frac{1}{\omega_0\,\omega_\nu}-1\right) = 0$$

Das ist:

$$C_{m\,\rho} = C_{m\,\nu} \cdot \frac{\frac{1}{\omega_\nu}-1}{\frac{1}{\omega_0\,\omega_\nu}-1}$$

Also:

$$(k,\ k_\rho) = \mathfrak{v}_\rho + \frac{\frac{1}{\omega_\nu}-1}{\frac{1}{\omega_0\,\omega_\nu}-1}\ (k-k_\nu)^{-\varepsilon_0-\varepsilon_\nu} \cdot u$$

2b)

$$(k,\ k_\nu)\left(\frac{1}{\omega_\nu}-1\right) - C_{m\,\rho}\,v_m \cdot 2\,\pi i = 0$$

Das ist:

$$C_{m\rho} = v_m \frac{\mathfrak{v}_\nu \left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right)}{2\pi i}$$

Also:

$$(k,\ k_\rho) = \mathfrak{v}_\rho + \frac{\frac{1}{\omega_\nu} - 1}{2\pi i} \cdot \mathfrak{v}_\nu \cdot \log (k - k_\nu)$$

3a)

$$(k,\ k_\nu)\ \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right) - \frac{C_{m\rho}}{C_{m\nu}} \cdot (k,\ k_\nu)\left(\frac{1}{\omega_0\,\omega_\nu} - 1\right) = 0$$

Das ist:

$$C_{m\rho} = C_{m\nu} \cdot \frac{\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right)}{\frac{1}{\omega_0\,\omega_\nu} - 1}$$

Also:

$$(k,\ k_\rho) = \mathfrak{v}_\rho + \frac{\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right)}{\frac{1}{\omega_0\,\omega_\nu} - 1} (k - k_\nu)^{-\varepsilon_0 - \varepsilon_\nu} \cdot u$$

3b)

$$(k,\ k_\nu)\ \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right) - C_{m\rho}\, v_m \cdot 2\pi i = 0$$

Das ist:

$$C_{m\rho} \cdot v_m = \mathfrak{v}_\nu \cdot \frac{\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right)}{2\pi i}$$

Also:

$$(k,\ k_\rho) = \mathfrak{v}_\rho + \frac{\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_\nu} - 1\right)}{2\pi i}\, \mathfrak{v}_\nu \log (k - k_\nu)$$

Um die entsprechenden Entwicklungen für $k = \infty$ zu erlangen, habe ich zu setzen:

$$k = \frac{1}{t}$$

Alsdann wird:

$$q_u = \frac{1}{t^\mu} \cdot h_\mu(t)$$

wo $h_\mu(t)$ eine ganze rationale Function von t ist.

Ferner wird:

$$\frac{\partial K}{\partial k} = -t^2 \frac{\partial K}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial k^2} = t^4 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + 2t^3 \frac{\partial K}{\partial t}$$

u. s. w.

Allgemein wird werden:

$$\frac{\partial^\mu K}{\partial k^\mu} = \sum_{i=1}^{i=\mu} A_{i\mu}\, t^{i+\mu} \frac{\partial^i K}{\partial t^i}$$

Für die Coefficienten $A_{i\mu}$ lässt sich eine Recursionsformel aufstellen; der erste Coefficient ist:

$$A_{ii} = (-1)^i$$

Alsdann lautet die transformirte Differentialgleichung:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} t^{-\mu} \cdot h_\mu \cdot \left(\sum_{i=0}^{i=\mu} A_{i\mu}\, t^{i+\mu} \frac{\partial^i K}{\partial t^i} \right) = 0$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich sodann die determinirende Fundamentalgleichung für $t = 0$ und mit Hülfe der Wurzeln derselben findet man die Darstellungen der Functionen (k, k_μ) in der Umgebung des unendlich fernen Punktes.

V.

Der einfachste Fall: $m = 1$ bietet wenig Interesse. Ich behandle daher zuerst den Fall:

$$m = 2$$

Es handelt sich also um die Periodicitätsmoduln des Abel'schen Integrals:

$$y = \int \frac{dz}{(z-k)^{\varepsilon_0}(z-k_1)^{\varepsilon_1}(z-k_2)^{\varepsilon_2}}$$

resp. um die bestimmten Integrale: $(k,\ k_1)$, $(k,\ k_2)$, $(k,\ \infty)$.

Die Veränderungen, welche diese 3 Functionen bei einem Umlaufe der Variabelen k um die singulären Punkte k_1, k_2, ∞ erleiden, sind:

k_1

$$(k,\ k_1)' = \frac{1}{\omega_0\,\omega_1}\ (k,\ k_1)$$

$$(k,\ k_2)' = (k,\ k_2) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)\ (k,\ k_1)$$

$$(k,\ \infty)' = (k,\ \infty) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)\ (k,\ k_1)$$

k_2

$$(k,\ k_1)' = (k,\ k_1) + \left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)\ (k,\ k_2)$$

$$(k,\ k_2)' = \frac{1}{\omega_0\,\omega_2}\ (k,\ k_2)$$

$$(k,\ \infty)' = (k,\ \infty) + \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)\ (k,\ k_2)$$

∞

$$(k,\ k_1)' = \omega_0\ (k,\ k_1) + \omega_0\ (\omega_1\,\omega_2 - 1)\ (k,\ \infty)$$
$$(k,\ k_2)' = \omega_0\ (k,\ k_2) + \omega_0\ (\omega_1\,\omega_2 - 1)\ (k,\ \infty)$$
$$(k,\ \infty)' = \omega_0\,\omega_1\,\omega_2\ (k,\ \infty)$$

Bezeichne ich die Substitutionen, durch welche die Functionen (k, k_1) und (k, k_2) nach einem Umlaufe um die Punkte k_1, k_2 und ∞ verwandelt werden, mit S_1, S_2 und S_∞, so ist:

$$S_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0 \omega_1}, & 0 \\ \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\omega_2} - 1 \\ 0 & \frac{1}{\omega_0 \omega_2} \end{vmatrix}$$

Ein Umlauf um den unendlich fernen Punkt ist zu betrachten als ein Umlauf um die beiden im Endlichen gelegenen Punkte k_1 und k_2 im entgegengesetzten Sinne.

Daher muss sein:

$$S_1 S_2 S_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder:

$$S_\infty^{-1} = S_1 S_2$$

Also ist:

$$S_\infty^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0 \omega_1}, & 0 \\ \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{\omega_2} - 1 \\ 0, & \frac{1}{\omega_0 \omega_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0 \omega_1}, & \frac{1}{\omega_0 \omega_1}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0 \omega_2} + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) \end{vmatrix}$$

Hieraus folgt:

$$S_\infty = \begin{pmatrix} \omega_0 \omega_1 + \omega_0 (1 - \omega_1)(1 - \omega_2), & \omega_0 (\omega_2 - 1) \\ \omega_0 \omega_2 (\omega_1 - 1), & \omega_0 \omega_2 \end{pmatrix}$$

Also wird nach einem Umlaufe um den unendlich fernen Punkt:

$$(k, k_1)' = (k, k_1)\,[\omega_0\,\omega_1 + \omega_0\,(1-\omega_1)\,(1-\omega_2)] + (k, k_2)\,\omega_0\,(\omega_2 - 1)$$

$$(k, k_2)' = (k, k_1)\,\omega_0\,\omega_2\,(\omega_1 - 1) + (k, k_2)\,\omega_0\,\omega_2$$

Nun hatten wir aber gefunden:

$$(k, k_1)' = \omega_0\,(k, k_1) + \omega_0\,(\omega_1\,\omega_2 - 1)\,(k, \infty)$$

$$(k, k_2)' = \omega_0\,(k, k_2) + \omega_0\,(\omega_1\,\omega_2 - 1)\,(k, \infty)$$

Aus der Vergleichung dieser beiden Paare von Gleichungen ergiebt sich alsdann die Relation:

$$(k, \infty)\,(\omega_1\,\omega_2 - 1)\,\omega_0 = (k, k_1)\,\omega_0\,\omega_2\,(1-\omega_1) + (k, k_2)\,\omega_0\,(1-\omega_2)$$

oder:

$$(k, \infty) = \frac{\omega_2\,(1-\omega_1)}{\omega_1\,\omega_2 - 1}\,(k, k_1) + \frac{1-\omega_2}{\omega_1\,\omega_2 - 1}\,(k, k_2)$$

Und zwar ergiebt sich, wie zu erwarten war, aus beiden Gleichungen derselbe Werth für (k, ∞).

Lasse ich die Variabele k irgend einen geschlossenen Weg in der unendlichen Ebene beschreiben, so werden die Veränderungen, welche die Functionen (k, k_1) und (k, k_2) erleiden, dargestellt durch eine Substitution der Form:

$$S_1^i\,S_2^h$$

wo i und h ganze positive oder negative Zahlen sind.

Ich gehe jetzt zur Aufstellung der Differentialgleichung für unsern Fall über.

Es ist:

$$P = (k - k_1)\,(k - k_2)$$

$$L = (\varepsilon_1 - 1)\,(k - k_2) + (\varepsilon_2 - 1)\,(k - k_1)$$

Also, nach 7c der vorigen Nummer:

$$(k - k_1)\,(k - k_2)\,\frac{\partial^2 K}{\partial k^2} + \frac{\partial K}{\partial k}\,[(\varepsilon_0 + \varepsilon_1\,(k - k_2) +$$

$$+ (\varepsilon_0 + \varepsilon_2)\,(k - k_1)] + \varepsilon_0\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1)\,K = 0$$

Die determinirenden Fundamentalgleichungen in Bezug auf k_1 und k_2 lauten:

$$r(r-1) + r(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) = 0$$

und

$$r(r-1) + r(\varepsilon_0 + \varepsilon_2) = 0$$

Die Wurzeln sind:

$$r = 0, \quad 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 \qquad k_1$$

$$r = 0, \quad 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_2 \qquad k_2$$

Hieraus ergeben sich dann die Darstellungen in der Umgebung der beiden singulären Punkte in der bekannten Form.

Sind $\varepsilon_0 + \varepsilon_1$ und $\varepsilon_0 + \varepsilon_2$ keine ganzen Zahlen, so treten in diesen Entwicklungen keine Logarithmen auf.

Um die determinirende Fundamentalgleichung für $k = \infty$ zu erhalten, setze ich:

$$k = \frac{1}{t}$$

Dann wird:

$$\frac{\partial K}{\partial k} = -t^2 \frac{\partial K}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial k^2} = t^4 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + 2t^3 \frac{\partial K}{\partial t}$$

Unsere Differentialgleichung wird somit in folgende Gleichung zwischen K und t transformirt:

$$t^2(1 - k_1 t)(1 - k_2 t)\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \frac{\partial K}{\partial t} \cdot t \Big[2(1 - k_1 t)(1 - k_2 t) -$$

$$- 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + t \{ (\varepsilon_0 + 1)(k_1 + k_2) + (\varepsilon_1 - 1) k_2 +$$

$$+ (\varepsilon_2 - 1) k_1 \} \Big] + \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1) K = 0$$

Die determinirende Fundamentalgleichung für den singulären Punkt $t = 0$ wird alsdann:

$$r(r-1) + r(2 - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_0 (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1) = 0$$

Das ist:

$$r^2 + r(1 - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_0(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1) = 0$$

oder:

$$(r - \varepsilon_0)(r + 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$r = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1$$

Hieraus ergeben sich die Darstellungen der Functionen (k, k_1), (k, k_2) in der Umgebung von $k = \infty$.

Ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ eine ganze Zahl, so können in diesen Entwicklungen Logarithmen auftreten; ist $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, so müssen Logarithmen auftreten. Ist dagegen $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ keine positive oder negative ganze Zahl, so giebt es nur Entwicklungen nach ganzen und gebrochenen Potenzen von $\frac{1}{k}$.

Die betreffenden Entwicklungen lauten:

(a)

$$(k, k_1) = w_1 \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0} + C \cdot w \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0} \cdot \log \frac{1}{k}$$

$$(k, k_2) = w_2 \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0} + C \cdot w \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0} \cdot \log \frac{1}{k}$$

$$(k, \infty) = w \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0}$$

(b)

$$(k, k_1) = w_1 \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0} + C' \cdot w \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$(k, k_2) = w_2 \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0} + C' \cdot w \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$(k, \infty) = w \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Die Functionen w, w_1, w_2 sind convergente, nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{k}$ entwickelbare Reihen, während C und C' Constanten bedeuten, deren Bestimmung keine Schwierigkeit macht.

Die Functionen $(k,\ k_1)$ und $(k,\ k_2)$ bilden ein Fundamentalsystem unserer Differentialgleichung. Denn, wäre dies nicht der Fall, so müsste eine Relation bestehen von der Form:

$$(k,\ k_2) = C\,.\,(k,\ k_1)$$

wo C eine Constante bedeutet.

Nach einem Umlaufe um k_1 geht diese Relation über in:

$$(k,\ k_2) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)\ (k,\ k_1) = \frac{C}{\omega_0\,\omega_1}\ (k,\ k_1)$$

Subtrahire ich diese Gleichung von der ersteren, so erhalte ich:

$$(k,\ k_1)\,.\,C\left(\frac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1\right) = (k,\ k_1)\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)$$

Also muss sein:

$$C = \frac{\dfrac{1}{\omega_0}\left(\dfrac{1}{\omega_1} - 1\right)}{\dfrac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1}$$

Nach einem Umlaufe um k_2 dagegen geht obige Relation über in:

$$\frac{1}{\omega_0\,\omega_2}\,(k,\ k_2) = C\,.\,(k,\ k_1) + C\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)\ (k,\ k_2)$$

Hieraus erhalte ich, wegen:

$$(k,\ k_2) = C\,.\,(k,\ k_1)$$

$$\frac{1}{\omega_0\,\omega_2}\,(k,\ k_1) = (k,\ k_1) + C\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)\ (k,\ k_1)$$

Das ist:

$$C = \frac{\dfrac{1}{\omega_0\,\omega_2} - 1}{\dfrac{1}{\omega_2} - 1}$$

Folglich muss sein:

$$\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) = \left(\frac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1\right)\left(\frac{1}{\omega_0\,\omega_2} - 1\right)$$

oder:

$$\frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2}-\frac{1}{\omega_0\,\omega_1}-\frac{1}{\omega_0\,\omega_2}+\frac{1}{\omega_0}=\frac{1}{\omega_0^2\,\omega_1\,\omega_2}-\frac{1}{\omega_0\,\omega_1}-\frac{1}{\omega_0\,\omega_2}+1$$

Das ist:

$$\left(\frac{1}{\omega_0}-1\right)\left(\frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2}-1\right)=0$$

Also müsste sein:

$$\omega_0=1 \text{ oder } \omega_0\,\omega_1\,\omega_2=1$$

Ist $\omega_0=1$, so ist der Punkt $z=k$ kein Verzweigungspunkt, was gegen die Annahme ist.

Ist dagegen $\omega_0\,\omega_1\,\omega_2=1$, so ist der Punkt $z=\infty$ kein Verzweigungspunkt unseres Integrals. Alsdann lässt sich aber dies Integral durch eine Substitution:

$$z-k_\rho=\frac{1}{u}$$

in ein anderes mit nur 2 endlichen und einem unendlich fernen Verzweigungspunkte verwandeln. Unser Integral gehört dann also eigentlich zu der Classe: $m=1$.

Also bilden die Functionen $(k,\ k_1)$ und $(k,\ k_2)$ wirklich ein Fundamentalsystem unserer Differentialgleichung.

Ich bemerke noch, dass die in unserm Falle $(m=2)$ vorkommenden Reihenentwicklungen sich sämmtlich mit Hülfe der sogenannten „Gauss'schen hypergeometrischen Reihen" darstellen lassen.

VI.

Ich gehe jetzt über zur Behandlung des Falles: $m=3$.

Es sind 4 im Endlichen gelegene Verzweigungspunkte vorhanden: $k,\ k_1,\ k_2,\ k_3$. Ich nehme wieder an, dass der unendlich ferne Punkt ebenfalls zu den Verzweigungspunkten gehört, da im andern Falle unser Integral durch eine rationale Transformation in ein anderes mit nur 3 endlichen Verzweigungspunkten $(m=2)$ übergeführt werden kann.

Die Veränderungen, welche die 4 Functionen $(k,\ k_1)$, $(k,\ k_2)$,

(k, k_3), (k, ∞) bei einem Umlaufe der Variabeln k um die singulären Punkte k_1, k_2, k_3, ∞ erleiden, sind:

k_1

$$(k, k_1)' = \frac{1}{\omega_0 \omega_1} (k, k_1)$$

$$(k, k_2)' = (k, k_2) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) (k, k_1)$$

$$(k, k_3)' = (k, k_3) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) (k, k_1)$$

$$(k, \infty)' = (k, \infty) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) (k, k_1)$$

k_2

$$(k, k_1)' = (k, k_1) + \left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) (k, k_2)$$

$$(k, k_2)' = \frac{1}{\omega_0 \omega_2} (k, k_2)$$

$$(k, k_3)' = (k, k_3) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) (k, k_2)$$

$$(k, \infty)' = (k, \infty) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) (k, \infty)$$

k_3

$$(k, k_1)' = (k, k_1) + \left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right) (k, k_3)$$

$$(k, k_2)' = (k, k_2) + \left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right) (k, k_3)$$

$$(k, k_3)' = \frac{1}{\omega_0 \omega_3} (k, k_3)$$

$$(k, \infty)' = (k, \infty) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right) (k, \infty)$$

∞

$$(k, k_1)' = \omega_0 (k, k_1) = \omega_0 (\omega_1 \omega_2 \omega_3 - 1) (k, \infty)$$
$$(k, k_2)' = \omega_0 (k, k_2) + \omega_0 (\omega_1 \omega_2 \omega_3 - 1) (k, \infty)$$
$$(k, k_3)' = \omega_0 (k, k_3) + \omega_0 (\omega_1 \omega_2 \omega_3 - 1) (k, \infty)$$
$$(k, \infty)' = \omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 (k, \infty)$$

Bezeichne ich die Substitutionen, durch welche die Functionen (k, k_1), (k, k_2), (k, k_3) nach einem Umlaufe um die Punkte k_1, k_2 k_3, ∞ verwandelt werden, mit S_1, S_2, S_3, S_∞, so besteht zunächst die Relation:

$$S_1 S_2 S_3 S_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder:

$$S_\infty^{-1} = S_1 S_2 S_3$$

Dabei ist:

$$S_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0 \omega_1}, & 0, & 0 \\ \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & 1, & 0 \\ \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{\omega_2} - 1, & 0 \\ 0, & \frac{1}{\omega_0 \omega_2}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \frac{1}{\omega_3} - 1 \\ 0, & 1, & \frac{1}{\omega_3} - 1 \\ 0, & 0, & \frac{1}{\omega_0 \omega_3} \end{vmatrix}$$

Aus diesen 3 Substitutionen setzt sich jede Substitution zusammen, welche irgend einem ganz beliebigen Wege der

Variabeln k, der zu seinem Ausgangspunkte zurückkehrt, entspricht, derart, dass stets:

$$S = S_1^{i_1} S_2^{i_2} S_3^{i_3}$$

wo i_1, i_2, i_3 ganze positive oder negative Zahlen sind.

Das bestimmte Integral (k, ∞) lässt sich stets homogen und linear ausdrücken durch die 3 bestimmten Integrale (k, k_1), (k, k_2), (k, k_3):

$$(k, \infty) = C_1 (k, k_1) + C_2 (k, k_2) + C_3 (k, k_3)$$

Die Grössen C sind Constanten. Lasse ich k einen Umlauf beschreiben um k, so wird hieraus:

$$(k, \infty) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)(k, k_1) = C_1 \cdot \frac{1}{\omega_0 \omega_1}(k, k_1) +$$
$$+ C_2\left[(k, k_2) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)(k, k_1)\right] +$$
$$+ C_3\left[(k, k_3) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)(k, k_1)\right]$$

Diese Gleichung subtrahire ich von der ersteren, dividire durch (k, k_1) und erhalte so:

$$\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) = C_1\left(\frac{1}{\omega_0 \omega_1} - 1\right) + C_2 \cdot \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) +$$
$$+ C_3 \cdot \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)$$

Lasse ich die Variabele k noch einen Umlauf machen um k_2 resp. k_3, so erhalte ich analog:

$$(k, \infty) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)(k, k_2) = C_1\left[(k, k_1) + \left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)(k, k_2)\right] +$$
$$+ C_2 \cdot \frac{1}{\omega_0 \omega_2}(k, k_2) + C_3\left[(k, k_3) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)(k, k_2)\right]$$

und:

$$(k, \infty) + \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right)(k, k_3) = C_1\left[(k, k_1) + \left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right)(k, k_2)\right] +$$

$$+ C_2\left[(k, k_2) + \left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right)(k, k_2)\right] + C_3 \frac{1}{\omega_0 \omega_3}(k, k_3)$$

Diese beiden Gleichungen subtrahire ich wieder von der ersten Relation, dividire durch (k, k_2) resp. (k, k_3) und erhalte so noch 2 neue Gleichungen zur Bestimmung der constanten Grössen C_1, C_2, C_3:

$$\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) = C_1\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) + C_2\left(\frac{1}{\omega_0 \omega_2} - 1\right) + C_3 \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right) = C_1\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right) + C_2\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right) + C_3\left(\frac{1}{\omega_0 \omega_3} - 1\right)$$

Aus diesen 3 Gleichungen erhalte ich sofort die folgenden Werthe für die zu bestimmenden Unbekannten C_1, C_2, C_3:

$$C_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0 \omega_2} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right), & \frac{1}{\omega_3} - 1, & \frac{1}{\omega_0 \omega_3} - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0 \omega_1} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_2} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_3} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0 \omega_3} - 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta$$

$$C_3 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_2} - 1, & \frac{1}{\omega_0\,\omega_2} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_3} - 1, & \frac{1}{\omega_3} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Dabei ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_2} - 1, & \frac{1}{\omega_0\,\omega_2} - 1, & \frac{1}{\omega_0}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right) \\ \frac{1}{\omega_3} - 1, & \frac{1}{\omega_3} - 1, & \frac{1}{\omega_0\,\omega_3} - 1 \end{vmatrix}$$

Das Verschwinden der Determinante Δ zeigt an, unter welchen Umständen die Functionen (k, k_1), (k, k_2), (k, k_3) durch eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten verbunden sind.

Es ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1, & \frac{1}{\omega_0} - 1, & 0 \\ \frac{1}{\omega_2} - 1, & -\frac{1}{\omega_2}\cdot\left(\frac{1}{\omega_0} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0} - 1 \\ \frac{1}{\omega_3} - 1, & 0, & -\frac{1}{\omega_3}\cdot\left(\frac{1}{\omega_0} - 1\right) \end{vmatrix}$$

oder:

$$\Delta = \left(\frac{1}{\omega_0} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3} - 1\right)$$

Ich bezeichne zur Abkürzung die Zähler der Grössen C_1, C_2, C_3 mit c_1, c_2, c_3. Dann ist:

$$c = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right), & 0, & 0 \\ \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right), & 1 - \frac{1}{\omega_0}, & 0 \\ \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right), & \left(1 - \frac{1}{\omega_0}\right)\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right), & 1 - \frac{1}{\omega_0} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \frac{1}{\omega_0}\left(1 - \frac{1}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1, & \frac{1}{\omega_0} - 1, & 0 \\ \frac{1}{\omega_2} - 1, & \left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\omega_0}\right), & 0 \\ \frac{1}{\omega_3} - 1, & \frac{1}{\omega_0} - 1, & 1 - \frac{1}{\omega_0} \end{vmatrix}$$

$$c_2 = \frac{1}{\omega_0\,\omega_1}\left(1 - \frac{1}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{1}{\omega_2} - 1\right)$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\omega_0\,\omega_1} - 1, & \frac{1}{\omega_0} - 1, & 0 \\ \frac{1}{\omega_2} - 1, & -\frac{1}{\omega_2}\left(\frac{1}{\omega_0} - 1\right), & \frac{1}{\omega_0} - 1 \\ \frac{1}{\omega_3} - 1, & 0, & \left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\omega_0}\right) \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{1}{\omega_3} - 1\right)$$

Also:

$$C_1 = \frac{\frac{1}{\omega_0} \cdot \left(\frac{1}{\omega_1} - 1\right)}{\frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3} - 1}$$

$$C_2 = \frac{\frac{1}{\omega_0\,\omega_1}\cdot\left(\frac{1}{\omega_2}-1\right)}{\frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3}-1}$$

$$C_3 = \frac{\frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2}\cdot\left(\frac{1}{\omega_3}-1\right)}{\frac{1}{\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3}-1}$$

Die gesuchte Relation lautet dann:

$$(k,\ \infty)\ (1-\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3) = (k,\ k_1)\ \omega_2\,\omega_3\,(1-\omega_1) + \\ + (k,\ k_2)\ \omega_3\,(1-\omega_2) + (k,\ k_3)\ (1-\omega_3)$$

Mit Hülfe dieser Relation lässt sich auch die Substitution S_∞ sehr leicht bestimmen.

Aus dem für Δ gefundenen Werthe folgt noch, dass zwischen den 3 Functionen (k, k_1), (k, k_2), (k, k_3) nur dann eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten bestehen könnte, wenn $\omega_0 = 1$, oder $\omega_0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3 = 1$ wäre. Dies ist nur möglich, wenn die Punkte k und ∞ nicht zu den Verzweigungspunkten unseres Integrals gehören, was gegen die Annahme ist.

Ich gehe jetzt zur Aufstellung der Differentialgleichung für den Fall $m = 3$ über.

Es ist:

$$P = (k-k_1)\,(k-k_2)\,(k-k_3)$$

$$L = (k-k_1)\,(k-k_2)\,(\varepsilon_3-1) + (k-k_1)\,(k-k_3)\,(\varepsilon_2-1) + \\ + (k-k_2)\,(k-k_3)\,(\varepsilon_1-1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial k} = (k-k_1)\,(k-k_2) + (k-k_1)\,(k-k_3) + (k-k_2)\,(k-k_3)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial k^2} = 2\,(3k-k_1-k_2-k_3)$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial k^3} = 6$$

$$\frac{\partial L}{\partial k} = (k-k_1)\,(\varepsilon_2+\varepsilon_3-2) + (k-k_2)\,(\varepsilon_1+\varepsilon_3-2) + \\ + (k-k_3)\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2-2)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial k^2} = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - 6$$

Ich erhalte somit die folgende Differentialgleichung:

$$(k-k_1)(k-k_2)(k-k_3)\frac{\partial^3 K}{\partial k^3} +$$

$$\Big[(\varepsilon_0+\varepsilon_3+1)(k-k_1)(k-k_2)+(\varepsilon_0+\varepsilon_2+1)(k-k_1)(k-k_3)+$$

$$+(\varepsilon_0+\varepsilon_1+1)(k-k_2)(k-k_3)\Big]\cdot\frac{\partial^2 K}{\partial k^2}+$$

$$+(\varepsilon_0+1)\cdot\Big[(\varepsilon_0+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1)(k-k_1)+(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)(k-k_3)+$$

$$+(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_3-1)(k-k_2)\Big]\frac{\partial K}{\partial k}+$$

$$+\ \varepsilon_0(\varepsilon_0+1)(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1)\,K=0$$

Die determinirenden Fundamentalgleichungen in Bezug auf die 3 singulären Punkte k_1, k_2, k_3 sind:

$$r(r-1)(r-2)+r(r-1)(1+\varepsilon_0+\varepsilon_\nu)=0$$
$$(\nu=1,\ 2,\ 3)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$r=0,\ 1,\quad 1-\varepsilon_0-\varepsilon_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3)$$

Die Differentialgleichung hat stets mindestens ein Integral, welches sich in der Umgebung eines jeden Verzweigungspunktes durch eine convergente Potenzreihe darstellen lässt. Ein solches Integral in der Umgebung von $k=k_1$ sei:

$$r_{11}=\sum_{h=\rho}^{h=\infty}(k-k_1)^h\,.\,C_h$$

Diese Reihe setze ich für K in unsere Differentialgleichung ein, welche ich zur Abkürzung schreiben will:

$$q_3\frac{\partial^3 K}{\partial k^3}+q_2\frac{\partial^2 K}{\partial k^2}+q_1\frac{\partial K}{\partial k}+q_0 K=0$$

Ferner sei noch gesetzt:

$$q_3 = a_1 (k - k_1) + a_2 (k - k_1)^2 + a_3 (k - k_1)^3$$
$$q_2 = b_0 + b_1 (k - k_1) + b_2 (k - k_1)^2$$
$$q_1 = c_0 + c_1 (k - k_1)$$
$$q_0 = d_0$$

Dann ist:

$$\sum_{h=\rho}^{h=\infty} C_h \cdot \Big\{ h (h-1)(h-2) \left[a_1 (k - k_2)^{h-2} + a_2 (k - k_1)^{h-1} + \right.$$
$$+ a_3 (k - k_1)^h \Big] + h (h-1) \left[b_0 (k - k_1)^{h-2} + b_1 (k - k_1)^{h-1} + \right.$$
$$+ b_2 (k - k_1)^h \Big] + h \left[c_0 (k - k_1)^{h-1} + c_1 (k - k_1)^h \right] +$$
$$+ d_0 (k - k_1)^h \Big\} = 0$$

Hieraus ergiebt sich sofort die folgende Recursionsformel für die C:

$$\left[(h+2)(h+1)h \cdot a_1 + (h+2)(h+1) b_0 \right] C_{h+2} +$$
$$+ \left[(h+1) h (h-1) a_2 + (h+1) h b_1 + (h+1) c_0 \right] C_{h+1} +$$
$$+ \left[h (h-1)(h-2) a_3 + h (h-1) b_2 + h c_1 + d_0 \right] C_h = 0$$

In dieser Formel kann ich 2 der Grössen C willkürlich annehmen; die übrigen sind dann vollkommen bestimmt. Ich wähle:

$$C_0 = 1, \qquad C_1 = 0$$

und bezeichne das zugehörige Integral durch: v_{11}

Setze ich: $h = -1$, so erhalte ich:

$$C_{-1} (-6 a_3 + 2 b_2 - c_1 + d_0) = 0$$

Also ist:

$$C_{-1} = 0$$

oder:

$$-6 a_3 + 2 b_2 - c_1 + d_0 = 0$$

Ist:

$$C_{-1} = 0$$

so folgt:

$$C_{-2} = 0$$

oder:

$$-24\,a_3 + 6\,b_2 - 2c_1 + d_0 = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Ist:

$$C_{-1} = C_{-2} = 0$$

so sind alle übrigen Coefficienten mit negativem Index ebenfalls $= 0$.

Ist:

$$C_{-1},\quad C_{-2} \neq 0$$

so kommen unendlich viele negative Potenzen von $k - k_1$ in der Entwicklung von v_{11} vor, was nach der allgemeinen Theorie ausgeschlossen ist, da unsere Differentialgleichung derjenigen Klasse des Herrn Fuchs angehört, welche keine wesentlichen Singularitäten besitzt. Ich muss daher annehmen:

$$C_{-1} = C_{-2} = 0$$

das ist:

$$C_{-h} = 0 \quad (h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \infty)$$

Damit die für v_{11} angenommene Reihe convergent sei, muss sein:

$$\lim \operatorname{mod} \left\{ \frac{C_{h+1}}{C_h} (k - k_1) \right\}_{h=\infty} < 1$$

Dividire ich unsere Recursionsformel durch $(h+2)(h+1)h$ und gehe zur Grenze $h = \infty$ über, so erhalte ich:

$$a_1 \lim C_{h+2} + a_2 \lim C_{h+1} + a_3 \lim C_h = 0$$

Bezeichne ich:

$$\lim \frac{C_{h+1}}{C_h} = \alpha$$

so ist:

$$\lim \frac{C_{h+2}}{C_h} = \alpha^2$$

und:

$$a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3 = 0$$

Nun war:

$$a_1 + a_2 (k - k_1) + a_3 (k - k_1)^2 = (k - k_2)(k - k_3)$$

Also ist α eine Wurzel der Gleichung:

$$\left(\frac{1}{\alpha} - (k_2 - k_1)\right)\left(\frac{1}{\alpha} - (k_3 - k_1)\right) = 0$$

Das ist:

$$\frac{1}{\alpha} = k_2 - k_1 \quad \text{oder} \quad k_3 - k_1$$

Also lautet die Convergenzbedingung:

$$\lim \operatorname{mod}\left(\frac{k - k_1}{k_2 - k_1}\right) < 1$$

resp.:

$$\lim \operatorname{mod}\left(\frac{k - k_1}{k_3 - k_1}\right) < 1$$

Diese Bedingungen sind aber in der Umgebung von k_1 stets erfüllt.

Folglich ist unsere Reihenentwicklung convergent, welche Werthe auch immer die willkürlich angenommenen ersten Coefficienten C_0 und C_1 haben mögen.

Ich wähle daher für ein zweites Integral v_{21}:

$$C_0 = 0, \qquad C_1 = 1$$

v_{21} verschwindet für $k = k_1$, was bei v_{11} nicht der Fall ist. Daher kann eine Relation:

$$v_{21} = C \,.\, v_{11}$$

nicht bestehen. Die beiden Integrale sind daher linear unabhängig von einander.

Ist $1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1$ keine ganze Zahl, so besitzt die Differentialgleichung ein drittes Integral von der Form:

$$v_{31} = (k - k_1)^{-\varepsilon_0 - \varepsilon_1} \,.\, w_1$$

wo w_1 eine convergente Potenzreihe bedeutet.

Dass die 3 Integrale v_{11}, v_{21}, v_{31} ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bilden, ist leicht ersichtlich.

Ist $1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1$ eine ganze Zahl, so kann in der Entwicklung von v_{31} ein Logarithmus auftreten; ist $1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = 0$ oder 1, so hat v_{31} bestimmt die Form:

$$v_{31} = \log (k - k_1) \,.\, w$$

Ganz analog bilde ich die in der Umgebung von $k = k_2$, $k = k_3$ gültigen Entwicklungen:

$$v_{12}, \quad v_{22}, \quad v_{32}; \qquad v_{13}, \quad v_{23}, \quad v_{33}$$

Die bestimmten Integrale (k, k_1), (k, k_2), (k, k_3) lassen sich somit als Integrale unserer Differentialgleichung in der Umgebung von $k = k_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ homogen und linear ausdrücken durch die in der angegebenen Weise festgesetzte Fundamental-Integrale.

Ich habe jetzt noch die bezüglichen Entwicklungen für den Punkt $k = \infty$ etwas näher zu betrachten. Zu diesem Zwecke habe ich zu setzen:

$$k = \frac{1}{t}$$

Dann wird:

$$\frac{\partial K}{\partial k} = -t^2 \frac{\partial K}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial k^2} = t^4 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + 2t^3 \frac{\partial K}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^3 K}{\partial k^3} = -t^6 \frac{\partial^3 K}{\partial t^3} - 6t^5 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - 6t^4 \frac{\partial K}{\partial t}$$

Setze ich noch:

$$t^i q_i \left(\frac{1}{t}\right) = h(t) \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

so lautet die transformirte Differentialgleichung:

$$h_3(t)\left(t^3 \frac{\partial^3 K}{\partial t^3} + 6t^2 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + 6t \frac{\partial K}{\partial t}\right) -$$

$$- h_2(t)\left(t^2 \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + 2t \frac{\partial K}{\partial t}\right) + h_1(t)\, t \frac{\partial K}{\partial t} - h_0 . K = 0$$

oder:

$$h_3 . t^3 . \frac{\partial^3 K}{\partial t^3} + t^2 (6h_3 - h_2) \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} +$$

$$+ t(6h_3 - 2h_2 + h_1) \frac{\partial K}{\partial t} - h_0 . K = 0$$

Hieraus erhalte ich alsdann die determinirende Fundamentalgleichung für den singulären Punkt $t = 0$:

$$r(r-1)(r-2)+r(r-1)[3-3\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3]-$$
$$-r[6\varepsilon_0+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3+(\varepsilon_0+1)(3\varepsilon_0+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3-3)]-$$
$$-\varepsilon_0(\varepsilon_0+1)(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1)=0$$

Das ist:

$$r^3-r^2(3\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+r[-1-3\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3-$$
$$-3\varepsilon_0+3+(\varepsilon_0+1)(3\varepsilon_0+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2\varepsilon_3)]-$$
$$-\varepsilon_0(\varepsilon_0+1)(\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1)=0$$

oder:

$$(r-\varepsilon_0)(r-\varepsilon_0-1)(r+1-\varepsilon_0-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)=0$$

Ich habe also die Wurzeln:

$$r=\varepsilon_0,\ \varepsilon_0+1,\ \varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1$$

Unsere Differentialgleichung besitzt daher mindestens ein Integral, welches sich in der Umgebung von $k=\infty$ in folgender Form darstellen lässt:

$$v_{\infty 1}=\left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0}\cdot\sum_{h=0}^{h=\infty}C_h\left(\frac{1}{k}\right)^h$$

Für die Coefficienten C ergiebt sich nach Einsetzen dieses Ausdrucks in die Differentialgleichung eine Recursionsformel, aus welcher die C auf verschiedene Weise so zu bestimmen sind, dass ich noch ein zweites, von $v_{\infty 1}$ linear unabhängiges Integral erhalte, welches ebenfalls unserer Differentialgleichung genügt und von derselben Form ist:

$$v_{\infty 2}=\left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0}\cdot\sum_{h=0}^{h=\infty}C'_h\left(\frac{1}{k}\right)^h$$

Der Convergenzbeweis wird ganz analog demjenigen für die Reihenentwicklungen in der Umgebung der endlichen singulären Punkte geführt.

Ein drittes Integral hat die Form:

$$v_{\infty 3}=\left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}\sum_{h=0}^{\infty}C'_h\left(\frac{1}{k}\right)^h$$

respective:

$$v_{\infty 3} = \left(\frac{1}{k}\right)^{\varepsilon_0} \cdot \log \frac{1}{k} \sum_{h=0}^{\infty} C''_h \left(\frac{1}{k}\right)^h$$

je nachdem die rationale Zahl $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ gebrochen oder ganz ist.

Hieraus ergeben sich dann wieder die entsprechenden Darstellungen unserer Functionen (k, k_1), (k, k_2), (k, k_3):

$$(k, k_\rho) = a_{1\rho} v_{\infty 1} + a_{2\rho} v_{\infty 2} + a_{3\rho} v_{\infty 3}$$

$$(\varrho = 1, 2, 3)$$

Die bestimmten Integrale:

$$(k, k_\rho) \qquad (\varrho = 1, 2, 3)$$

bilden ein Fundamentalsystem unserer Differentialgleichung, da bewiesen wurde, dass zwischen denselben eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten unmöglich ist.

Thesen.

I.

Es darf als mindestens sehr unwahrscheinlich gelten, dass Fermat, wie er selbst behauptet, einen wirklich strengen Beweis des sogenannten grossen Fermat'schen Satzes besessen hat.

II.

Mit Recht behauptet Spinoza im Gegensatz zu den Materialisten, dass die Substanz neben der Ausdehnung das gleichberechtigte Attribut des Denkens besitze.

III.

Wir sind nicht berechtigt anzunehmen, dass das Gravitationsgesetz im strengen Sinne richtig ist.

Vita.

Natus sum Hermann Broecker anno MDCCCLVII die XXIII mensis Maii in oppido, cui nomen est „Osnabrück“, patre Gerhardo Broecker, matre Alwina e gente Wessels. Fidem confiteor evangelicam. Anno MDCCCLXVII in gymnasium quod dicitur reale urbis patriae meae receptus sum. Quod cum per decem annos frequentassem, testimonium maturitatis vere anni MDCCCLXXVII assecutus sum. Deinde in universitatibus Heidelbergii, Lipsiae, Argentorati, Berolini studiis me dedi mathematicis, physicis, philosophicis.

Praeceptores mihi fuerunt viri doctissimi:

Heidelbergii: Fuchs, Fischer.

Lipsiae: Neumann, Scheibner, Bruhns, v. d. Mühll, Zöllner.

Argentorati: Christoffel, Winnecke.

Berolini: Fuchs, Kronecker, Kundt, Dilthey.

Quibus omnibus viris, praecipue viro doctissimo L. Fuchs, maximas gratias ago.

Figurentafel.

Fig. 1.

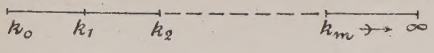


Fig. 2.

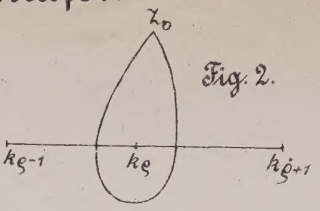


Fig. 3.

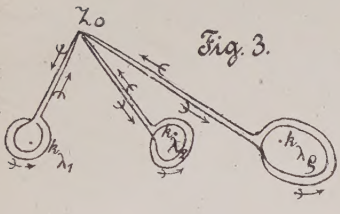


Fig. 4.

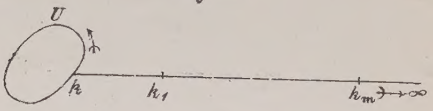


Fig. 5.

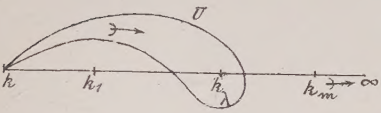


Fig. 6.

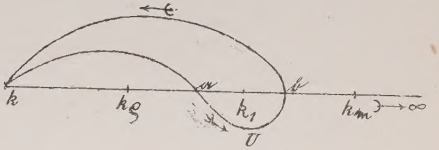


Fig. 7.

Fig. 8.

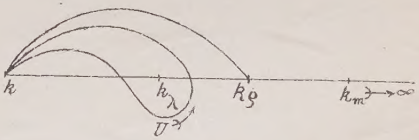
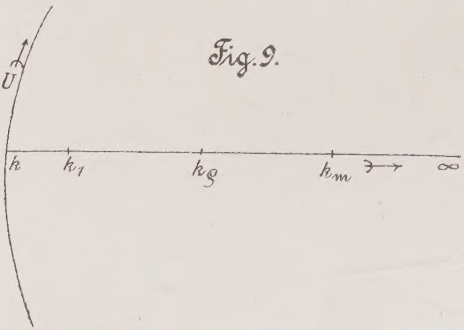


Fig. 9.



Lith. Anst. v. C. L. Keller, Berlin S.